

# 浅水波对半无限长和有限长直立薄壁 防波堤的绕射\*

叶伟峰, 黄华, 苏炜, 黄坤辉

中山大学航空航天学院, 广东 广州 510275

**摘要:** 基于浅水波绕射理论, 利用特征函数展开法并结合应用稳定相分析法, 分别推导了椭圆余弦波一阶分量对半无限长以及有限长直立薄壁防波堤的绕射波势解析解, 并据此计算了对应于两种不同类型防波堤的无量纲最大波浪力和无量纲最大绕射波面。结果表明: 当有限长薄壁防波堤堤长较大时, 其所受波浪力和端部的绕射波面分布与半无限长防波堤的对应结果十分接近, 从而实现了对应两种防波堤不同浅水波绕射解的相互验证。此外, 对于两种防波堤, 椭圆余弦波理论所得结果均明显高于 Airy 微幅波理论的对应值。浅水波入射角、防波堤臂长、水深比以及浅水波特征参数的变化均将对波浪作用产生一定影响。随着浅水波特征参数值的增大, 两种防波堤的实际绕射波浪力均随之增大。

**关键词:** 椭圆余弦波; 半无限长直立薄壁防波堤; 有限长直立薄壁防波堤; 波浪力; 绕射波面

**中图分类号:** O353 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2021) 03-0105-10

## Diffraction of shallow water wave by semi-infinite and finite-length vertical thin wall breakwater

YE Weifeng, HUANG Hua, SU Wei, HUANG Kunhui

School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

**Abstract:** Based on shallow wave diffraction theory, the wave potential solutions to first order cnoidal wave diffraction by semi-infinite and finite-length vertical thin wall breakwater are derived respectively by applying the eigenfunction expansion approach and stationary phase method. The dimensionless maximum wave forces and diffracted wave surfaces for two different kind of breakwaters are analytically calculated. Results demonstrate that when the finite-length thin wall breakwater has enough large length, the diffracted wave surface distribution around the end of breakwater and its wave force have almost same values as that of semi-infinite breakwater, which gives an effective mutual verification of two analytical solutions. The wave effect results from cnoidal wave theory for two kind of breakwaters are obviously larger than those predicted by small amplitude wave theory in same shallow water conditions. The variation of incident wave angle, ratio of breakwater arm length, water depth and shallow water wave characteristic may affect the wave. Practical diffracted wave forces on two kind of breakwaters will all increase as the shallow water wave characteristic parameter value increases.

**Key words:** cnoidal wave; semi-infinite vertical thin wall breakwater; finite-length vertical thin wall breakwater; wave force; diffracted wave surface

\* 收稿日期: 2019-12-30 录用日期: 2020-01-22 网络首发日期: 2020-11-20

基金项目: 广东省科技计划项目 (2016A050502022)

作者简介: 叶伟峰 (1994年生), 男; 研究方向: 水动力学; E-mail: 603983833@qq.com

通信作者: 黄华 (1961年生), 男; 研究方向: 水动力学; E-mail: tsyhh1982@163.com

防波堤作为对近岸海工建筑和海上作业水域实施保护的重要设施而广为应用。防波堤结构形式多样, 常见类型包括单突堤 (半无限长薄壁堤)、岛堤 (有限长薄壁堤)、双突堤、岛式堤、梳式堤、T形堤、圆弧堤以及V形堤等等。Penney和Price<sup>[1]</sup>推导了Airy微幅波对半无限长单突堤波浪绕射的一种积分数学解。Michael和McCormick<sup>[2]</sup>用多项式近似代替弗雷斯纳尔积分, 使Penney-Price的积分解得到一定简化。余广明<sup>[3]</sup>应用不规则波模型对类似问题进行了相关研究。冯丽<sup>[4]</sup>应用Mike 21-BW波浪模型对单突堤波浪绕射进行了数值模拟计算。Chang等<sup>[5]</sup>对微幅波作用下的V形防波堤的防浪效应展开了数值研究。陆志妹等<sup>[6]</sup>和程建生等<sup>[7]</sup>采用特征函数展开法解析计算了微幅波作用于V形防波堤的波浪力和相关绕射效应。楚玉川等<sup>[8]</sup>解析计算了Airy微幅波对单层圆弧型薄壁防波堤的绕射波浪力。由于防波堤构建的所属水域大都属于近海浅水区域, 当波浪从深水区向近岸传播时将明显呈现水波的非线性特征, 线性微幅波理论可能不再适用, 需要引入椭圆余弦波等相关浅水波理论。Issacson<sup>[9]</sup>最早应用椭圆余弦波一阶理论对单一圆柱的浅水波绕射进行了解析计算。邱大洪<sup>[10]</sup>进一步计算了椭圆余弦波对单柱绕射的波面分布。Weng等<sup>[11]</sup>应用特征函数展开法解析研究了透空圆环柱群与椭圆余弦波的相互作用问题。朱梦华等<sup>[12]</sup>解析计算了斜入射椭圆余弦波对无限长直立防波堤的波浪力。张敖等<sup>[13]</sup>解析研究了椭圆余弦波对圆弧型贯底式防波堤的绕射。

本文通过引入椭圆余弦波一阶分量模型, 推广应用特征函数展开法, 并使之与稳定相分析法相结合, 首先对半无限长薄壁直立防波堤 (单突堤) 的浅水波绕射场进行了解析求解, 进一步推导了椭圆余弦波对有限长直立薄壁堤绕射的多重级数解。根据本文所给理论, 对两种典型防波堤的绕射波浪作用进行了综合实例计算, 相关结果有效反映了浅水波绕射理论的合理与正确性, 同时实现了对应两种防波堤浅水波绕射不同解法正确性的相互验证。

## 1 椭圆余弦波对直立薄壁防波堤绕射的一阶解

### 1.1 半无限长薄壁堤的绕射波解与波面和波浪力公式

均匀水深为 $d$ 的海域中设置一直立且刚性的薄壁半无限长防波堤 (单突堤) 结构 (如图1所示), 建立坐标系 $oxy$  (即坐标系 $or\theta$ ), 其中 $oxy$ 平面位于水底,  $oz$ 轴垂直向上, 原点位于直堤左端点,  $ox$ 正轴与堤身重合。入射波为浅水波中的椭圆余弦一阶波, 波高为 $H$ , 圆频率基频为 $\omega$ , 入射角为 $\beta$  (与轴 $ox$ 正向夹角)。海水可视为无粘不可压缩理想流体, 其运动无旋, 可按流场水波速度势描述流体运动。

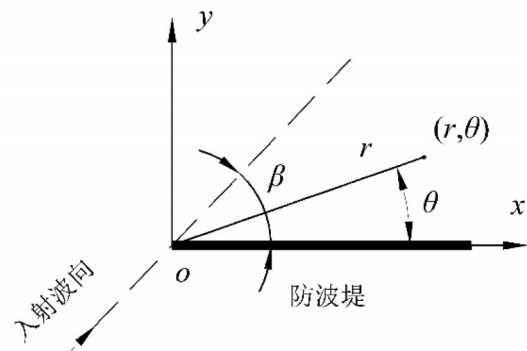


图1 半无限长直立薄壁防波堤 (单突堤)

Fig. 1 Semi-infinite vertical thin wall breakwater

单突堤对斜入射来波将分别产生反射和散射。设水波速度势总势、入射势、反射势和散射势分别为 $\Phi$ 、 $\Phi_i$ 、 $\Phi_r$ 和 $\Phi_s$ , 其边值问题的一般提法为

$$\Phi = \Phi_i + \Phi_r + \Phi_s = \text{Re}(\varphi) = \text{Re}(\varphi_i + \varphi_r + \varphi_s), \quad (1)$$

$$\nabla^2 \varphi = \nabla^2 \varphi_i = \nabla^2 \varphi_r = \nabla^2 \varphi_s = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} = 0, \quad (z = 0), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (z = d + \eta), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + g\eta = 0, \quad (z = d + \eta), \quad (5)$$

式中 $\eta$ 为波面,  $g$ 为重力加速度, 另 $\varphi$ 须满足单突堤物面条件,  $\varphi_i$ 和 $\varphi_s$ 须分别满足各自无穷远处的辐射条件。入射角为 $\beta$ 的一阶入射椭圆余弦波的波势可表达为<sup>[9, 13]</sup>

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_i &= \frac{H\sqrt{gd}}{kd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} e^{inkr \cos(\theta - \beta)} e^{-in\omega t} \\ &= \frac{H\sqrt{gd}}{kd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} e^{in(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (\beta \leq \theta < 2\pi), \\ A_n &= \frac{2\pi^2}{\kappa^2 K^2(\kappa)} \left( \frac{nb^n}{1 - b^{2n}} \right), \quad b = e^{-\frac{\pi K(\kappa')}{K(\kappa)}}, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

式中 $\vec{r}$ 为位置矢量, 即 $\vec{r} = (x, y)$ ;  $\vec{k}$ 为波数矢量, 且 $\vec{k} = (k_x, k_y) = (k \cos \beta, k \sin \beta)$ ,  $k$ 为波数;  $K(\kappa)$ 为第一类完全椭圆积分;  $\kappa'^2 = 1 - \kappa^2$ ;  $H$ 表示波高; 模量 $\kappa$ 由方程 $\kappa^2 K^2(\kappa) = 3\pi^2 H / (4k^2 d^3)$ 确定。引入参数

$$\lambda = \frac{4\kappa^2 K^2(\kappa)}{3\pi^2} = \frac{H}{k^2 d^3}, \quad (7)$$

它表征波高、波数和水深等相对变化所导致的水波非线性特征效应的变化。由式(6)可见, 若令 $\varphi_i = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{in}$ ,  $\varphi_r = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{rn}$ , 则 $\varphi_{in}$ ,  $\varphi_{rn}$ 分别代表入射波和反射波的第 $n$ 个谐波势, 其波频为 $\omega_n = n\omega$ , 波数为 $k_n = nk$ 且入射波谐波势 $\varphi_{in}$ 满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial x} - ik_{nx} \varphi_{in} &= 0, \quad (k_{nx} = nk_x), \\ \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial y} - ik_{ny} \varphi_{in} &= 0, \quad (k_{ny} = nk_y). \end{aligned} \quad (8)$$

据此可知, 反射波谐波势 $\varphi_{rn}$ 须满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{rn}}{\partial y} + ik_{ny} \varphi_{rn} &= 0, \quad (y = -\infty), \\ \frac{\partial \varphi_{rn}}{\partial x} - ik_{nx} \varphi_{rn} &= 0, \quad (x = +\infty). \end{aligned} \quad (9)$$

另有单突堤波反射邻域堤身侧面表面条件

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (10)$$

应用特征函数解法可得斜入射条件下椭圆余弦波一阶分量反射势为

$$\begin{aligned} \varphi_r &= \frac{H\sqrt{gd}}{kd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} e^{-in\omega t} e^{ink_x x} e^{-ink_y y} \\ &= \frac{H\sqrt{gd}}{kd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} e^{-in\omega t} e^{inkr \cos(\theta + \beta)}, \\ & \quad (2\pi - \beta \leq \theta \leq 2\pi). \end{aligned} \quad (11)$$

进一步椭圆余弦波入射波、反射波和散射波势的一阶波势和(总波势)可表达为

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + \Phi_s = \Phi_i + \Phi_r + \Phi_s \\ &= \text{Re} \left[ \frac{H\sqrt{gd}}{kd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} (\varphi_{0n} + \varphi_{sn}) e^{-in\omega t} \right] \\ &= \text{Re} \left[ \frac{H\sqrt{gd}}{kd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} \varphi_n e^{-in\omega t} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

式中

$$\varphi_n = \begin{cases} 0, & 0 < \theta < \beta, \\ e^{inkr \cos(\theta - \beta)}, & \beta \leq \theta < 2\pi - \beta, \\ e^{inkr \cos(\theta - \beta)} + e^{inkr \cos(\theta + \beta)}, & 2\pi - \beta \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (13)$$

它表示特定流域内的反射波分量。由于 $\Phi_s$ 为散射波势, 依照一阶波绕射理论可推知: 若设 $\varphi_s = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{sn}$ , 则 $\varphi_{sn}$ 相当于散射波的第 $n$ 个谐波势, 在无穷远处 $r \rightarrow \infty$ 应满足 Sommerfeld 条件

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{\partial \varphi_{sn}}{\partial r} - ik_n \varphi_{sn} \right] \\ = \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} - ink \right) \varphi_{sn} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

根据特征函数展开法, 取

$$\begin{aligned} \Phi &= \text{Re} \left[ \frac{H\sqrt{gd}}{kd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} e^{-in\omega t} \varphi_n \right], \\ \varphi_n &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} J_{\frac{m}{2}}(nkr) \cos \frac{m}{2} \theta, \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $J_{\frac{m}{2}}(x)$ 为第一类 $\frac{m}{2}$ 阶贝塞尔函数,  $a_{nm}$ 为待定系数。此解已自动满足拉普拉斯方程和单突堤固壁条件 $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0$ ,  $(\theta = 0, 2\pi)$ 。由式(15)可得

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi_n \cos \frac{m}{2} \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} (\varphi_{0n} + \varphi_{sn}) \cos \frac{m}{2} \theta d\theta \\ &= a_{nm} J_{\frac{m}{2}}(nkr) \int_0^{2\pi} \cos^2 \frac{m}{2} \theta d\theta. \end{aligned} \quad (16)$$

由(14)与(16)可得

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} - ink \right) \left[ a_{nm} J_{\frac{m}{2}}(nkr) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{0n} \cos \frac{m}{2} \theta d\theta \right] \\ = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sqrt{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} - ink \right) \varphi_{sn} \cos \frac{m}{2} \theta d\theta = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

利用渐近关系

$$\begin{aligned} J_{\frac{m}{2}}(nkr) &= \sqrt{\frac{2}{\pi nkr}} \cos \left( nkr - \frac{m\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \\ & \quad + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

再进一步应用稳定相分析法<sup>[14]</sup>, 并利用式(13)可得

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial r} - ink\right) \int_0^{2\pi} \varphi_{0n} \cos \frac{m}{2} \theta d\theta \\
 & \approx \left(\frac{\partial}{\partial r} - ink\right) \left[ 2 \cos \frac{m}{2} \beta \sqrt{\frac{2\pi}{nkr}} e^{i(nkr - \frac{\pi}{4})} \right. \\
 & \quad \left. + \cos \frac{m}{2} (\beta + \pi) \sqrt{\frac{2\pi}{nkr}} e^{-i(nkr - \frac{\pi}{4})} \right] \quad (19) \\
 & = 2nk \cos \frac{m}{2} (\beta + \pi) \sqrt{\frac{2\pi}{nkr}} e^{-i(nkr + \frac{\pi}{4})} \\
 & \quad + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

利用式 (18) 和 (19), 由 (17) 可得

$$a_{nm} = 2 \cos \frac{m}{2} (\beta + \pi) e^{-i \frac{m\pi}{4}}. \quad (20)$$

相应总波势为

$$\begin{cases} \Phi = \text{Re} \left[ \frac{H \sqrt{gd}}{kd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} \varphi_n e^{-in\omega t} \right], \\ \varphi_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} J_{\frac{m}{2}}(nkr) \cos \frac{m}{2} \theta \\ = \sum_{m=0}^{\infty} 2 \cos \frac{m}{2} (\beta + \pi) e^{-i \frac{m\pi}{4}} J_{\frac{m}{2}}(nkr) \cos \frac{m}{2} \theta. \end{cases} \quad (21)$$

对应的波面公式为

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=d} = \text{Re}(\eta_0),$$

$$\eta_0 = H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} \varphi_n e^{-in\omega t}. \quad (22)$$

波浪场压力分布为

$$P = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{Re}(p), \quad p = \rho g H \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-in\omega t} \varphi_n. \quad (23)$$

单突堤单位宽浅水波波浪力 (矩) 公式为

$$\begin{cases} \hat{F} = \int_0^d [P|_{\theta=2\pi} - P|_{\theta=0}] dz \\ = \text{Re} \left\{ \rho g H d \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-in\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} J_{\frac{m}{2}}(nkr) [(-1)^m - 1] \right\}, \\ \hat{M} = \frac{d}{2} \hat{F}. \end{cases} \quad (24)$$

### 1.2 有限长薄壁堤的绕射波解与波面和波浪力公式

在均匀水深为  $d$  的海域中设置长为  $2a$  (臂长为  $a$ ) 的直立贯底式有限长薄壁防波堤 (如图 2 所示), 建立坐标系  $oxy$  (即坐标系  $o\theta z$ ), 其中  $oxy$  平面位于水底,  $oz$  轴垂直向上, 原点位于直堤中点。入射波为椭圆余弦一阶波, 波高为  $H$ , 圆频率基频为  $\omega$ , 入射角为  $\beta$  (与轴  $ox$  正向夹角)。

以原点为圆心、臂长  $a$  为半径划一圆柱面, 将流场划分为圆柱外流区  $\Omega_0$  和内流区  $\Omega_1$  ( $0 \leq \theta < \pi$ )

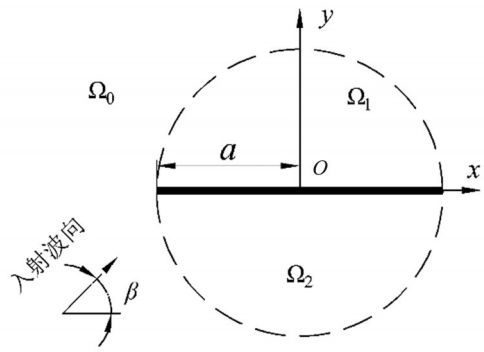


图 2 有限长直立薄壁防波堤

Fig. 2 Finite-length vertical thin wall breakwater

与  $\Omega_2$  ( $\pi \leq \theta < 2\pi$ )。设海水为理想无粘不可压缩流体, 运动无旋。设水波速度势总势、入射势和散射势分别为  $\Phi$ 、 $\Phi_i$  和  $\Phi_s$ , 入射角为  $\beta$  的一阶入射椭圆余弦波的波势可表达为<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned}
 \varphi_i &= \frac{H \sqrt{gd}}{kd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} e^{inkr \cos(\theta - \beta)} e^{-in\omega t} \\
 &= \frac{H \sqrt{gd}}{kd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} e^{-in\omega t} \\
 & \quad \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m J_m(nkr) [\cos m\theta \cos m\beta + \sin m\theta \sin m\beta], \quad (25)
 \end{aligned}$$

式中  $J_n(x)$  为第一类  $n$  阶贝塞尔函数, 其他符号意义同式 (6)。设对应流域  $\Omega_j$  的椭圆余弦波总波势为  $\Phi^{(j)} = \Phi_i + \Phi_s^{(j)} = \text{Re}(\varphi^{(j)})$ , ( $j = 0, 1, 2$ ), 其对应的边值问题数学形式与式 (1) 至 (5) 相同。由式 (25) 可见, 依照一阶波绕射理论, 若设定

$\varphi_s^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{sn}^{(0)}$ , 则  $\varphi_{sn}^{(0)}$  相当于散射波的第  $n$  个谐波势, 在无穷远处  $r \rightarrow \infty$  应满足 Sommerfeld 条件  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{\partial \varphi_{sn}^{(0)}}{\partial r} - ik_n \varphi_{sn}^{(0)} \right] = 0$ 。应用特征函数展开法得

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(0)} &= \varphi_i + \varphi_s^{(0)} = \frac{H \sqrt{gd}}{kd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} e^{-in\omega t} \\
 & \quad \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \beta_m J_m(nkr) [\cos m\theta \cos m\beta + \sin m\theta \sin m\beta] \right. \\
 & \quad \left. + H_m^{(1)}(nkr) [A_{nm}^{(0)} \cos m\theta + B_{nm}^{(0)} \sin m\theta] \right\}, \quad r \leq a, \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(1)} &= \frac{H \sqrt{gd}}{kd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} e^{-in\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}^{(1)} J_m(nkr) \cos m\theta, \\
 & \quad r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{H\sqrt{gd}}{kd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} e^{-in\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}^{(2)} J_m(nkr) \cos m(\theta - \pi),$$

$$r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (28)$$

式中  $H_n^{(1)}(x)$  为第一类  $n$  阶汉克耳函数;  $A_{nm}^{(0)}, B_{nm}^{(0)}, A_{nm}^{(1)}, A_{nm}^{(2)}$  为待定系数, 且  $B_{n0}^{(0)} = 0$ 。易见, 各区势已满足薄壁堤侧面物面条件:  $\frac{\partial \Phi^{(j)}}{\partial \theta} = 0$  ( $0 < r \leq a, j = 1: \theta = 0, \pi; j = 2: \theta = \pi, 2\pi$ ) 以及拉氏方程、海底条件和无穷远处辐射条件。各流域圆柱交界面径向匹配条件为

$$\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r} = \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r}, \quad r = a, 0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r}, \quad r = a, \pi \leq \theta \leq 2\pi, \quad (29)$$

$$\varphi^{(0)} = \varphi^{(1)}, \quad r = a, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (30)$$

$$\varphi^{(0)} = \varphi^{(2)}, \quad r = a, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi. \quad (31)$$

由边界条件式 (29), 可设:

$$f(\theta) = \begin{cases} f_1(\theta), & 0 \leq \theta < \pi, \\ f_2(\theta), & \pi \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad (32)$$

其中

$$f_1(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[ nk\beta_m \cos m\beta J'_m(nka) + A_{nm}^{(0)} nkH_m^{(1)'}(nka) \right] \cdot \cos m\theta + \left[ nk\beta_m \sin m\beta J'_m(nka) + B_{nm}^{(0)} nkH_m^{(1)'}(nka) \right] \sin m\theta \right\} - \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}^{(1)} nkJ'_m(nka) \cos m\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (33)$$

$$f_2(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[ nk\beta_m \cos m\beta J'_m(nka) + A_{nm}^{(0)} nkH_m^{(1)'}(nka) \right] \cdot \cos m\theta + \left[ nk\beta_m \sin m\beta J'_m(nka) + B_{nm}^{(0)} nkH_m^{(1)'}(nka) \right] \sin m\theta - \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}^{(2)} nkJ'_m(nka) \cos(m\theta - m\alpha), \right. \\ \left. \pi \leq \theta \leq 2\pi \right. \quad (34)$$

将  $f(\theta)$  在  $0 \sim 2\pi$  上展开为傅氏级数, 可得

$$\int_0^\pi f_1(\theta) \cos l\theta d\theta + \int_\pi^{2\pi} f_2(\theta) \cos l\theta d\theta = 0, \quad l = 0, 1, \dots,$$

$$\int_0^\pi f_1(\theta) \sin l\theta d\theta + \int_\pi^{2\pi} f_2(\theta) \sin l\theta d\theta = 0, \quad l = 1, 2, \dots. \quad (35)$$

相应地,

$$nk\beta_l \cos l\beta J'_l(nka)(1 + \delta_{l0})\pi + A_{nl}^{(0)} nk H_l^{(1)'}(nka) \cdot (1 + \delta_{l0})\pi - \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}^{(1)} kJ'_m(nka) T_{ml}^{(1)} - \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}^{(2)} nkJ'_m(nka) T_{ml}^{(2)} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (36)$$

$$nk\beta_l \sin l\beta J'_l(nka)\pi + nkB_{nl}^{(0)} H_l^{(1)'}(nka)\pi - \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}^{(1)} nkJ'_m(nka) T_{ml}^{(3)} - \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}^{(2)} nkJ'_m(nka) T_{ml}^{(4)} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (37)$$

式中  $\delta_{ij}$  为克罗内克函数, 且有

$$\begin{cases} T_{ml}^{(1)} = \int_0^\pi \cos l\theta \cos m\theta d\theta, \\ T_{ml}^{(2)} = \int_\pi^{2\pi} \cos l\theta \cos m(\theta - \pi) d\theta, \\ \quad m, l = 0, 1, \dots; \\ T_{ml}^{(3)} = \int_0^\pi \sin l\theta \cos m\theta d\theta, \\ T_{ml}^{(4)} = \int_\pi^{2\pi} \sin l\theta \cos m(\theta - \pi) d\theta, \\ \quad m = 0, 1, \dots, \quad l = 1, 2, \dots. \end{cases} \quad (38)$$

由边界条件式 (30) 和 (31), 利用函数系  $\{\cos m\theta, 0 \leq \theta \leq \pi\}$  和函数系  $\{\cos m(\theta - \pi), \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$  的正交性, 分别可得

$$A_{nl}^{(1)} J_l(nka)(1 + \delta_{l0}) \frac{\pi}{2} - \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \cos m\beta J_m(nka) T_{lm}^{(1)} - \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \sin m\beta J_m(nka) T_{lm}^{(3)} - \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}^{(0)} H_m^{(1)}(nka) T_{lm}^{(1)} - \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}^{(0)} H_m^{(1)}(nka) T_{lm}^{(3)} = 0, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (39)$$

$$A_{nl}^{(2)} J_l(nka)(1 + \delta_{l0}) \frac{\pi}{2} - \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \cos m\beta J_m(nka) T_{lm}^{(2)} - \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}^{(0)} H_m^{(1)}(nka) T_{lm}^{(2)} - \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}^{(0)} H_m^{(1)}(nka) T_{lm}^{(4)} = 0, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (40)$$

式 (36)、(37)、(39) 和 (40) 构成了未知系数无限维联立方程组。实算中进行适度有限维运算即可满足计算精度要求。椭圆余弦波对有限长直立薄壁防波堤绕射的波面按公式  $\eta^{(j)} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi^{(j)}}{\partial t} \Big|_{z=d} = \text{Re}(\eta_0^{(j)})$  ( $j = 0, 1, 2$ ) 计算。椭圆余弦波绕射场的压力按公式  $P^{(j)} = -\rho \frac{\partial \Phi^{(j)}}{\partial t} = \text{Re}(p^{(j)})$  ( $j = 0, 1, 2$ ) 计算。进一步可以推得有限长薄壁防波堤所受单位宽波浪力  $\hat{F}$  (力矩  $\hat{M}$ ) 与总波浪力  $F$  (力矩  $M$ ) 分别为

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{F} &= \int_0^d \left\{ [P^{(2)} - P^{(1)}] \Big|_{\theta=\pi} + [P^{(2)} \Big|_{\theta=2\pi} - P^{(1)} \Big|_{\theta=0}] \right\} dz, \\ F &= \int_0^a \hat{F} dr = \text{Re}(f), \\ f &= \rho g \frac{H}{2} ad \frac{2}{ka} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n e^{-in\omega t}}{n} \\ &\quad \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ [(-1)^m + 1] [A_{nm}^{(2)} - A_{nm}^{(1)}] \int_0^{nka} J_m(x) dx \right\}, \\ \hat{M} &= \frac{d}{2} \hat{F}, \quad M = \frac{d}{2} F. \end{aligned} \right. \quad (41)$$

## 2 算例与分析

在半无限长薄壁堤和有限长薄壁堤的算例中, 波面的无量纲因子为  $H$ , 单位宽波浪力和总波浪力分别按  $\rho g(H/2)d$  和  $\rho g(H/2)ad$  无量纲化, 而空间坐标  $x$ 、 $y$  的无量纲因子为  $d$ 。因浅水波中无量纲单位宽波浪力矩值和无量纲总波浪力矩值分别为对应力值的一半, 故实算中进行波浪力计算即可。为方便比较, 有限长堤取足够长度 ( $a/d = 20$ ), 对半无限长堤和有限长堤各自左端相同位置附近邻域作浅水波正入射下无量纲绕射波面分布图, 即图 3-4。

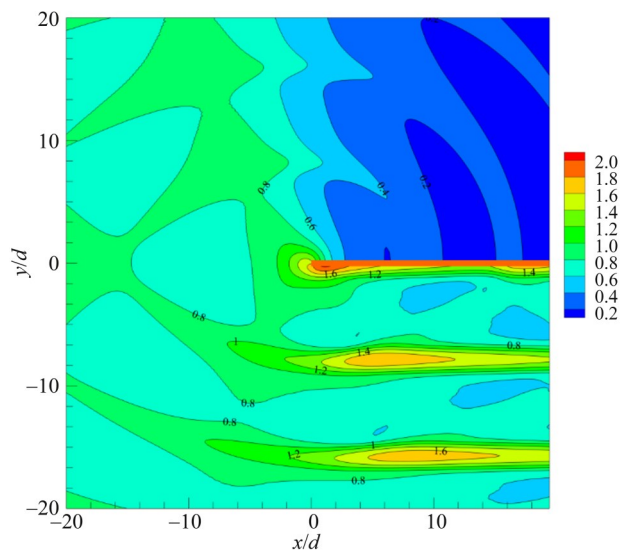


图 3 半无限长薄壁防波堤的最大波面分布等高线图  
Fig. 3 The contour plot of maximum wave surface distribution of semi-infinite thin wall breakwater ( $\lambda = 3, \beta = \pi/2, kd = 0.4$ )

如图所示, 两图存在明显相似的最大绕射波面分布特征, 从而验证了不同解下相似几何特征结构的水波绕射具有相似的作用机制和解析结果。进一步, 选取足够长有限长堤与半无限长堤左端

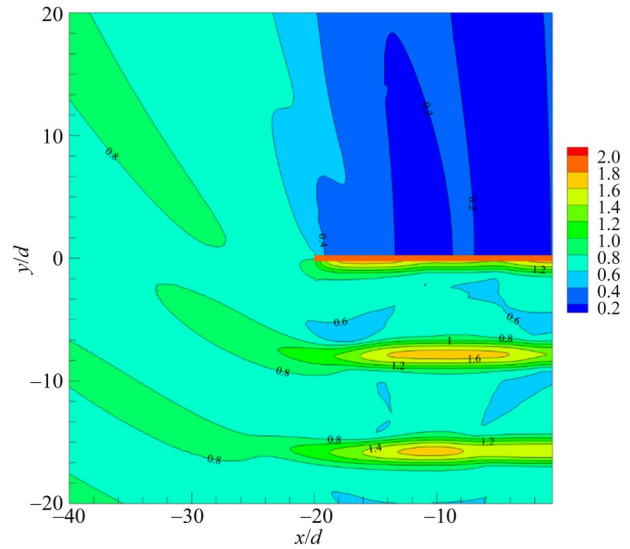


图 4 有限长薄壁防波堤的最大波面分布等高线图  
Fig. 4 The contour plot of maximum wave surface distribution of finite-length thin wall breakwater ( $\lambda = 3, \beta = \pi/2, kd = 0.4$ )

部相同位置处作最大波面分布剖面对比图。为此, 半无限长堤取  $x_1/d = 10$  作剖面 (半无限长堤左端位置为  $x_1/d = 0$ ), 足够长有限长堤取  $x_2/d = -10$  作剖面 (有限长堤中端位置为  $x_2/d = 0$ ), 两处为同一位置。如图 5 所示, 在相同波浪参数条件下, 两剖面结果高度吻合, 这表明足够长的有限长堤端部的绕射波面分布与半无限长防波堤的对应结果十分接近, 从而对两种防波堤浅水波绕射解的不同解析解法实现了有效的相互验证。图 5 的结果表明: 对于两种防波堤, 堤前壁最大无量纲波面大幅降低 80% 以上至堤壁后邻域, 反映了防波堤的有效防浪效应。

图 6 为半无限长薄壁堤和足够长有限长薄壁堤

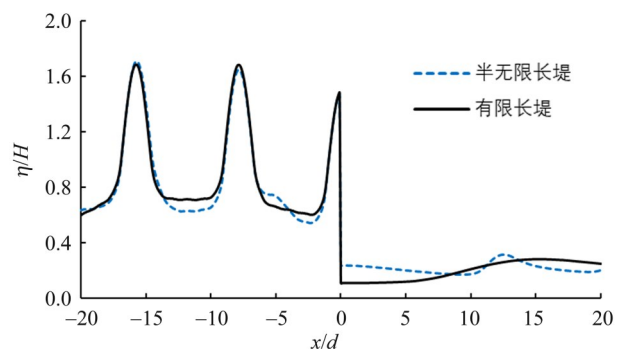


图 5 半无限长堤和有限长堤的最大波面分布剖面  
Fig. 5 The profiles of maximum wave surface distribution of semi-infinite and finite-length breakwaters ( $\lambda = 3, \beta = \pi/2, kd = 0.4, a/d = 20$ )

所受最大无量纲单位宽波浪力分布的对比图。为方便计, 图中符号 $f_1$ 、 $f_2$ 分别代表半无限长堤和有限长堤上按因子 $\rho g(H/2)d$ 无量纲化后的单位宽最大波浪力。波浪力分布统一从防波堤左端部开始计算(半无限长堤从左端取无量纲堤长范围 $x_1/d = 0 \sim 20$ ; 有限长堤从左端到右端取无量纲堤长范围 $x_2/d = -20 \sim 0$ )。图6表明: 两种防波堤对应的无量纲最大单位宽波浪力随堤长振荡变化且相互大致吻合, 特别左端结果基本吻合, 由此进一步相互验证了两种不同形式浅水波绕射解析解的正确性。

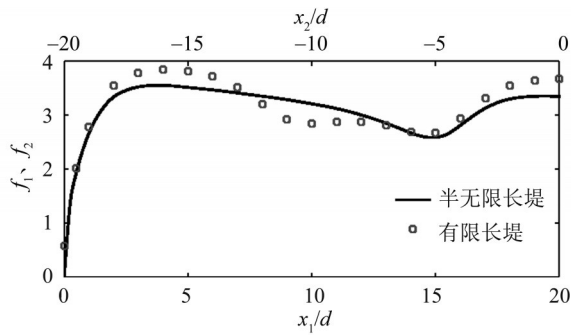


图6 半无限长堤和有限长堤的最大无量纲单位宽波浪力  
Fig. 6 The maximum dimensionless wave force per unit width of semi-infinite and finite-length breakwaters ( $\lambda = 3, \beta = \pi/2, kd = 0.4, a/d = 20$ )

图7-8分别为相同浅水条件下绕半无限长堤和绕有限长堤绕射的椭圆余弦波和Airy波之最大无量纲波面分布剖面, 图7(半无限长堤)取 $x_1/d = 10$ 作剖面, 图8(有限长堤)取 $x_2/d = 0$ 作剖面, 横坐标为无量纲纵向距离 $y/d$ 。结果表明: 两种防波堤的堤前最大波面的椭圆余弦波计算值整体上明显大于Airy波理论的对值, 其中半无限长和有限长防波堤前侧的椭圆余弦波无量纲最大波面分别高于Airy波对值的60%和35%。

图9-10分别为半无限长堤和有限长堤上的椭圆余弦波与Airy波的最大无量纲单位宽波浪力的比较图。图9表明: 半无限长堤所受Airy波的最大单位宽无量纲波浪力平均而言约为椭圆余弦波对应结果的61%; 而图10表明: 有限长堤(考虑正入射波绕射作用的对称性, 从左端取无量纲堤长 $x_2/d = -5 \sim 0$ 即可)的此对值约为65%。以上结果表明: 在一定的浅水条件下, 采用椭圆余弦波模型来预测两种防波堤的波浪作用更为合理可靠。

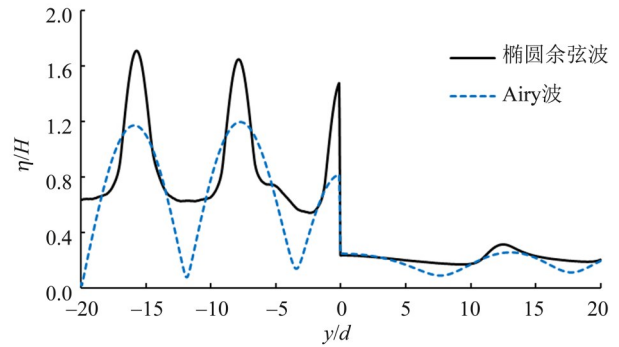


图7 绕半无限长堤的椭圆余弦波和Airy波的最大波面分布剖面

Fig. 7 The profiles of maximum wave surface distribution between cnoidal wave and airy wave around semi-infinite breakwater( $\lambda = 3, \beta = \pi/2, kd = 0.4$ )

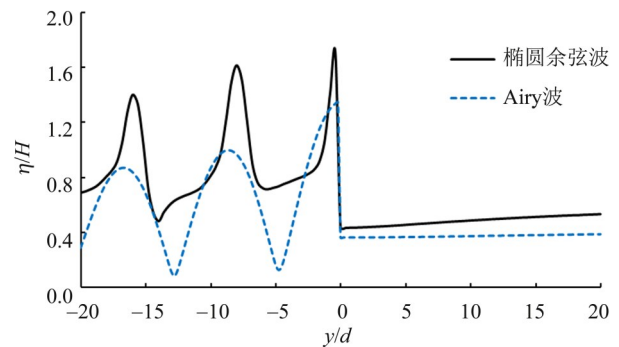


图8 绕有限长堤的椭圆余弦波和Airy波的最大波面分布剖面

Fig. 8 The profiles of maximum wave surface distribution between cnoidal wave and airy wave around finite-length breakwater( $\lambda = 3, \beta = \pi/2, kd = 0.4, a/d = 5$ )

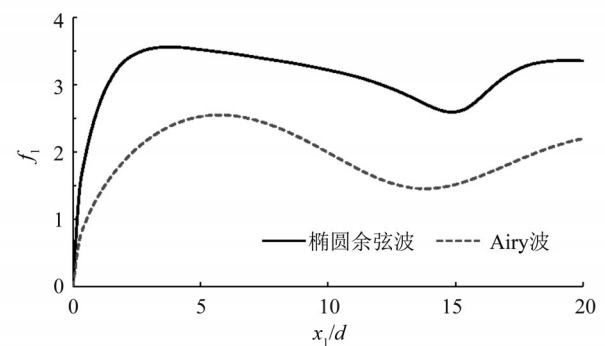


图9 半无限长堤椭圆余弦波和Airy波的最大单位宽波浪力  
Fig. 9 The maximum wave force per unit width on semi-infinite breakwater between cnoidal wave and airy wave ( $\lambda = 3, \beta = \pi/2, kd = 0.4$ )

图11为半无限长堤(自左端取无量纲堤长范围 $x_1/d = 0 \sim 20$ )最大无量纲单位宽波浪力随入射角度的变化趋势。由图可知: 在左端部一定邻域( $0 < x_1/d < 3$ )最大单位宽无量纲波浪力随入射角

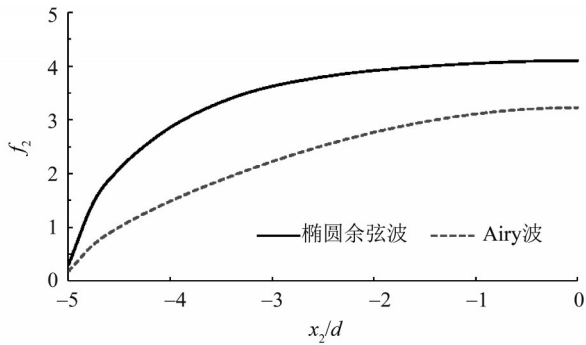


图 10 有限长堤椭圆余弦波和 Airy 波的最大单位宽波浪力  
 Fig. 10 The maximum wave force on finite-length breakwater per unit between cnoidal wave and airy wave ( $\lambda = 3, \beta = \pi/2, kd = 0.4, a/d = 5$ )

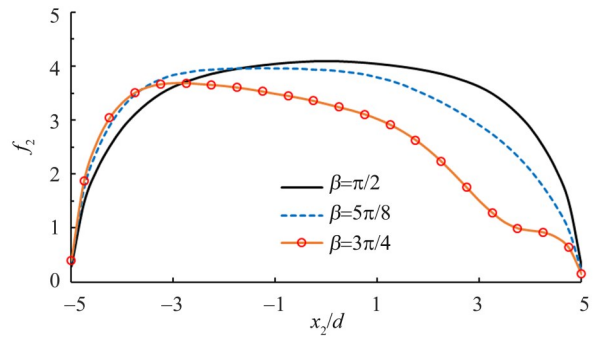


图 12 不同入射角下有限长堤最大无量纲单位宽波浪力  
 Fig. 12 The maximum wave force per unit of finite-length breakwater at different incident angles ( $\lambda = 3, kd = 0.4, a/d = 5$ )

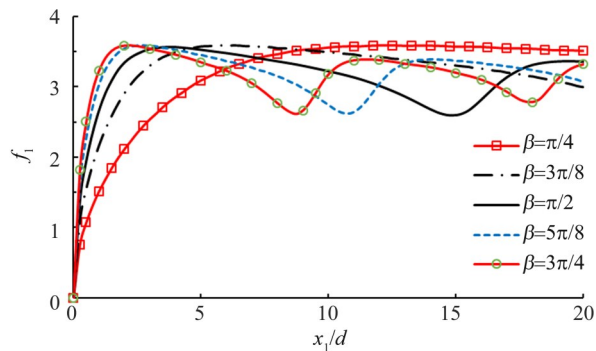


图 11 不同入射角下半无限长堤最大无量纲单位宽波浪力  
 Fig. 11 The maximum wave force per unit of semi-infinite breakwater at different incident angles ( $\lambda = 3, kd = 0.4$ )

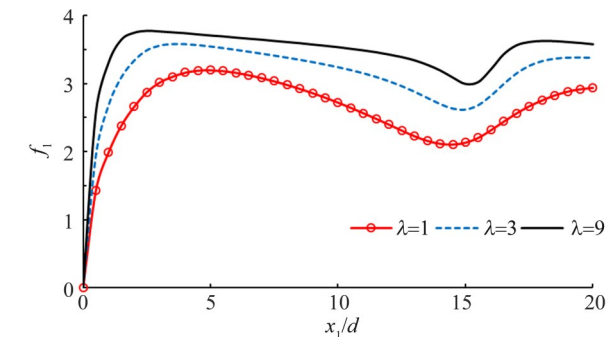


图 13 不同  $\lambda$  下半无限长堤最大无量纲单位宽波浪力  
 Fig. 13 The maximum wave force per unit of semi-infinite breakwater at different  $\lambda$  ( $\beta = \pi/2, kd = 0.4$ )

增大（从左入射到右入射， $\beta = \pi/2$  为正入射）而略为增大。随着堤长增大，单宽波浪力呈现振荡变化，且随入射角的变化同样呈振荡变化。图 12 为有限长堤左端至右端最大无量纲单位宽波浪力随入射角度的变化趋势。考虑水波左入射与右入射的对称性，则仅需计算分析水波右入射即可 ( $\beta = \pi/2 \sim \pi$ ，其中  $\beta = \pi/2$  为正入射)。图中结果表明：入射角变化对端部单宽波浪力影响相对较小。对于水波右入射而言，当  $x_2/d > -2$ ，单宽最大无量纲波浪力随入射角的增大而减小，平均而言正入射堤对应最大单宽波浪力幅值。此外，有限长堤中部单宽力平均而言大于两端邻域的对值。

图 13-14 分别为半无限长堤和有限长堤在不同非线性影响因子  $\lambda$  下最大无量纲单位宽波浪力的分布变化图。图中结果表明：随着  $\lambda$  的增大，在两种防波堤上分布的无量纲单位宽波浪力有所增大，当  $\lambda < 3$  时增幅较为明显，之后增加的趋势减缓。

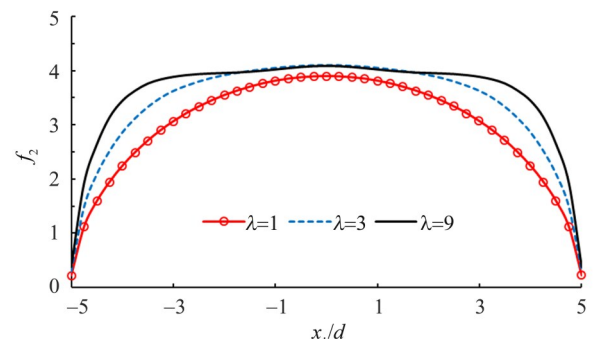


图 14 不同  $\lambda$  下有限长堤最大无量纲单位宽波浪力  
 Fig. 14 The maximum wave force per unit of finite-length breakwater at different  $\lambda$  ( $\beta = \pi/2, kd = 0.4, a/d = 5$ )

按表达式  $\lambda = (H/d)/(kd)^2$ ，在固定参数  $kd$  和水深  $d$  的情况下，随着  $\lambda$  的增大，波高  $H$  同样增大，则由两种防波堤上单位宽波浪力的无量纲因子  $\rho g (H/2)d$  可知，实际最大单位宽波浪力将随着  $\lambda$  的增大而增大。

图15为不同入射角下有限长堤最大无量纲总波浪力随参数 $kd$ 的变化趋势。图中 $f_3$ 为椭圆余弦波一阶分量作用于有限长薄壁防波堤的最大无量纲总波浪力。同样,考虑水波左入射与右入射的对称性,仅需计算右入射即可。结果表明:最大无量纲波浪力随 $kd$ 先增后减,进一步呈振荡变化。随着水波入射角的增大,总波浪力幅值减小,其中水波正入射( $\beta = \pi/2$ )的总波浪力幅值明显高于其他入射角度的对应值。

图16为不同臂长水深比下有限长堤最大无量纲总波浪力随参数 $kd$ 的变化趋势。由图中结果可知,当 $kd$ 较小时( $kd < 0.5$ ),最大无量纲总波浪力随臂长水深比的增加而略为增加。而当 $kd > 0.5$ 时,随臂长水深比的变化,总波浪力幅值交错变化。

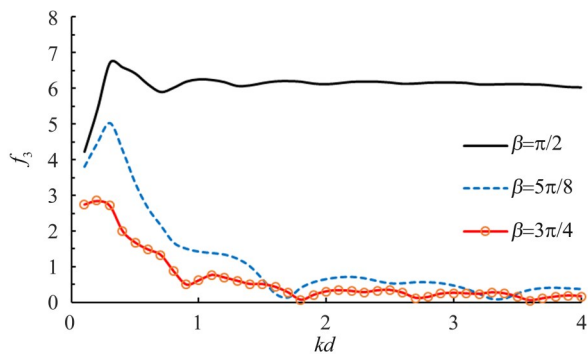


图15 不同入射角下有限长堤最大无量纲总波浪力随 $kd$ 的变化

Fig. 15 Variation of maximum dimensionless total wave force of finite-length breakwater with  $kd$  at different incident angles ( $\lambda = 3, a/d = 5$ )

### 3 结论

本文使用特征函数展开法和稳定相分析法,分别给出浅水波模型下半无限长直立薄壁堤和有限长直立薄壁堤的解析解,并据此计算了半无限

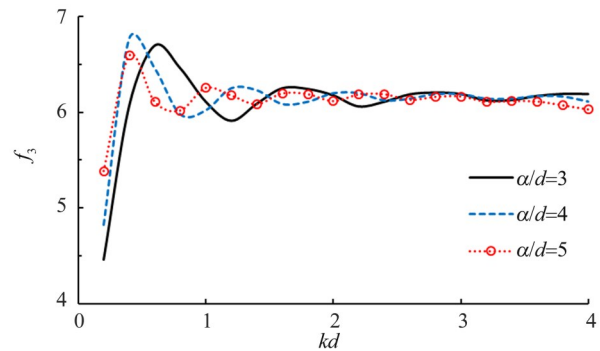


图16 不同臂长水深比下有限长堤最大无量纲总波浪力随 $kd$ 的变化

Fig. 16 Variation of maximum dimensionless total wave force of finite-length breakwater with  $kd$  at different arm length to water depth ratios ( $\lambda = 3, \beta = \pi/2$ )

长堤和有限长堤在椭圆余弦波绕射下的波面分布、单位宽波浪力以及总波浪力,得出以下结论:

1) 取一较大的臂长水深比,将防波堤端部最大波面分布、最大波面分布剖面以及沿有限长堤分布的单位宽波浪力与相同浅水条件下的半无限长堤计算结果进行对比,两者结果十分接近,实现了两种不同模型解析解的相互验证,说明本文给出的解是合理可靠的。

2) 利用本文给出的浅水波模型下半无限长堤和有限长堤的理论解进行实算,发现最大无量纲波面分布剖面和最大单位宽波浪力分布皆大于相同浅水条件下 Airy 波理论的结果,采用浅水波理论来预测防波堤受到的波浪作用更可靠。

3) 入射角 $\beta$ 对半无限长堤和有限长堤上最大单位宽波浪力的分布有影响。有限长堤总波浪力受人射角、臂长、水深比等波浪参数的影响。综合来说,浅水波入射角以及防波堤堤长与水深比等参数的变化均将对波浪作用产生一定影响。随着浅水波特征参数值的增加,防波堤的实际绕射波浪力也将随之增加。

### 参考文献:

- [1] PENNEY W G, PRICE A T. The diffraction theory of sea waves and the shelter afforded by breakwaters [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society London, Series A, 1952, 244(882): 236-253.
- [2] MICHAEL E, MC C. Polynomial approximations for Fresnel integrals in diffraction analysis [J]. Coastal Engineering, 2002, 44: 261-266.
- [3] 余广明. 单突堤后的波浪绕射[J]. 海洋学报, 1981, 3(2): 330-347.
- YU G M. Wave diffraction around a semi-infinite single breakwater [J]. Acta Oceanologica Sinica, 1981, 3(2): 330-347.

- [4] 冯丽,马小舟. 低频波浪在单突堤附近的传播变形研究[J]. 中国水运,2013,12(8):158-163.  
FENG L, MA X Z. Study on the propagation and deformation of low-frequency waves near a single jetty [J]. China Water Transport,2013,12(8):158-163.
- [5] CHANG K H, HOW T D, HUANG L H. Accurate solution to diffraction around a modified V-shaped breakwater[J]. Coastal Engineering,2012,68:56-66.
- [6] 陆志妹,缪国平,朱仁传,等. V形贯底式防波堤上波浪作用力的解析研究[J]. 水动力学研究与进展,2007,22(1):136-141.  
LU Z M, MIAO G P, ZHU R C, et al. Analytical research on the wave force exerted on V-shaped bottom-mounted breakwaters [J]. Chinese Journal of Hydrodynamics,2007,22(1):136-141.
- [7] 程建生,缪国平,尤云祥,等. 波浪在V形贯底式防波堤上绕射的解析研究[J]. 上海交通大学学报,2005,39(5):813-817.  
LU Z M, MIAO G P, YOU Y X, et al. Analytical research on the wave diffraction on v-type bottom-mounted breakwaters[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University,2005,39(5):813-817.
- [8] 楚玉川,程建生,赵鑫,等. 圆弧型贯底式防波堤上波浪作用力的解析研究[J]. 水动力学研究与进展(A辑),2014,29(2):212-217.  
CHU Y C, CHENG J S, ZHAO X, et al. Analytical study on the wave force of arc-shaped bottom-mounted breakwaters [J]. Chinese Journal of Hydrodynamics,2014,29(2):212-217.
- [9] ISAACSON M D S Q. Shallow wave diffraction around large cylinder [J]. Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, 1977, 103(1): 69-82.
- [10] 邱大洪. 浅水区孤立墩上的非线性波浪力[J]. 水利学报,1989(4):22-32.  
QIU D H. The nonlinear wave force on a circular cylinder in shallow water[J]. Journal of Hydraulic Engineering,1989(4):22-32.
- [11] WENG Y L, XU X N, HUANG H. Interaction of cnoidal waves with an array of vertical concentric porous cylinders [J]. Applied Ocean Research, 2016, 58: 21-36.
- [12] 朱梦华,黄华,詹杰民,等. 斜入射椭圆余弦波对直立防波堤的波浪渗流作用[J]. 中山大学学报(自然科学版),2016,55(4):23-30.  
ZHU M H, HUANG H, ZHAN J M, et al. Oblique incidence cnoidal water wave-induced seepage effects on vertical breakwater [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni,2016,55(4):23-30.
- [13] 张敖,黄华,詹杰民,等. 浅水波与圆弧型贯底式防波堤的相互作用[J]. 水动力学研究与进展,2017,32(3):282-292.  
ZHANG A, HUANG H, ZHAN J M, et al. Shallow water wave interaction with arc-shaped bottom-mounted breakwater [J]. Chinese Journal of Hydrodynamics,2017,32(3):282-292.
- [14] 邹志利. 水波理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2005:332-334.

(责任编辑 王海蓉)